Giochi di lettere: un assaggio di metamatematica[1]

di A.C. Paseau (Oxford)

1 Gödel

La metamatematica è lo studio matematico della matematica stessa. Due dei suoi teoremi più conosciuti—i cosiddetti teoremi di incompletezza—sono stati dimostrati da Kurt Gödel nel 1931. In forma semplificata, il primo teorema di incompletezza afferma che nessun sistema matematico tipico può dimostrare tutte le verità della matematica. Il secondo teorema di incompletezza (anch'esso semplificato) afferma, a sua volta, che nessun sistema matematico tipico può dimostrare la propria coerenza. Un altro teorema dello stesso genere stabilisce che l'ipotesi del continuo non è né dimostrabile né confutabile nella teoria standard degli insiemi.[2] Molti di noi logici sono stati inizialmente attratti da questo ambito di studi, come studenti, proprio perché avevamo sentito parlare di questi risultati. Anche i ricercatori in matematica conoscono queste tematiche o hanno almeno una vaga idea del perché «non possiamo dimostrare tutto ciò che vogliamo dimostrare» (usando gli strumenti che abbiamo attualmente a disposizione).

Lo scopo di questo articolo è quello di dare agli studenti (dal terzo anno di liceo in poi) una rapida idea di cosa sia la metamatematica, ovvero di come si possa usare la matematica per studiare la matematica stessa. I professori di liceo potrebbero, ad esempio, elaborare un esercizio in classe sui giochi di lettere che descriverò in questo articolo e usarli come trampolino per ulteriori approfondimenti. Poiché non si presuppone alcuna conoscenza della logica formale, i giochi non vogliono essere tanto un'introduzione ai teoremi di Gödel quanto un'introduzione a un'introduzione a essi. Tuttavia, essi mostrano, in modo accessibile, come la metamatematica possa essere matematicamente interessante.

2 Il gioco delle vocali (+2-variante)

Il seguente 'gioco' viene giocato con le lettere dell'alfabeto inglese. Ricordiamo che vi sono 26 lettere nell'alfabeto inglese, fra cui 5 vocali: a, e, i, o, u.[3] Si inizia il gioco scrivendo una qualsiasi vocale. In ogni momento successivo, è possibile eseguire una delle seguenti tre azioni:

---

[1] Tradotto liberamente, con qualche revisione, dall'autore e adottando dei suggerimenti linguistici, ricevuti con riconoscenza, da parte di Giuseppe Capone, Emma Baldassari e Carlo Nicolai. Inoltre, l'autore ringrazia Gerry Leversha, Robin Bhattacharyya e un critico anonimo per i commenti sulla versione inglese che è apparsa sulla *Mathematical Gazette* nel 2016.

[2] L'ipotesi del continuo afferma che non esiste nessun insieme la cui cardinalità sia strettamente compresa fra quella dei numeri interi e quella dei numeri reali. L'indecidibilità dell'ipotesi è stata dimostrata da Gödel e Paul Cohen.

[3] Poiché sostituire l'alfabeto inglese con quello italiano implicherebbe diversi cambiamenti dell'argomento matematico abbiamo deciso di proporlo nella lingua originale. In inglese la lettera y può avere un valore vocalico così come un valore consonantico, a seconda della parola in cui appare. Per esempio, il valore fonetico di y nella parola *why* è vocalico, invece il valore in *yes*, *yak*, oppure *you* è consonantico. Noi seguiamo la tradizione considerando la lettera y come consonante.

(i) Azione 1: immediatamente sotto l'ultima lettera da scrivere, scrivere una vocale.

(ii) Azione 2: immediatamente sotto l'ultima lettera da scrivere, scrivere una qualsiasi lettera che sia il doppio successore nell'alfabeto di qualsiasi lettera precedente.

(iii) Azione 3: terminare l'enumerazione.

(Il doppio successore di a è c, di b è d, ecc.) Una possibile lettera terminale è la lettera terminale di un possibile gioco. La domanda è: quali sono le possibili lettere terminali? Pensateci prima di continuare a leggere.

3 Soluzione

La risposta richiama una curiosa caratteristica dell'alfabeto inglese. Numeriamo le lettere dell'alfabeto, in modo che a sia 1, b sia 2, $\cdots$ e z sia 26. Il trucco sta nel notare che le vocali occupano posizioni dispari:

$a : 1°$
$e : 5°$
$i : 9°$
$o : 15°$
$u : 21°$

Poiché aggiungendo 2 a un numero dispari si ottiene un numero dispari e assumendo che il numero di lettere dell'alfabeto inglese (26) è pari, l'insieme delle possibili lettere terminali è proprio l'insieme delle lettere in posizione dispari: a, c, e, g, i, k, m, o, q, s, u, w, y.

La descrizione del gioco è stata abbastanza vaga in quanto non specificava se l'alfabeto «si avvolge», cioè se ai fini del gioco il successore di z sia a. Come siamo ora in grado di vedere, questo non ha importanza: le lettere terminali sono quelle dispari in entrambi i casi. Dato che y occupa una posizione dispari nell'alfabeto, la risposta resta ugualmente invariata se si prende y per una vocale.

4 Il gioco delle vocali (+3-variante)

Per la variante del gioco in cui si può scrivere il triplo successore della lettera precedente, la risposta è che tutte le lettere dell'alfabeto inglese sono possibili lettere terminali, supponendo che l'alfabeto si avvolga. Per comprendere questo aspetto, notiamo che a partire da a si possono raggiungere tutte le lettere la cui posizione nell'alfabeto dà resto 1 se divisa per 3 (1, 4, 7, ecc.). Una volta raggiunto y (si noti che 25 dà resto 1 quando diviso per 3 e che y è la venticinquesima lettera dell'alfabeto inglese), si raggiunge b poiché b è il triplo successore di y. Partendo da b, ottenibile da a via $d, g, \cdots, y$, si raggiungono tutte le lettere la cui posizione nell'alfabeto inglese dà resto 2 quando divisa per 3 (2, 5, 8, ecc.). Da z, che è la ventiseiesima lettera dell'alfabeto inglese (si noti che 26 dà resto 2 quando diviso per 3), consegue poi c, poiché c è il triplo successore di z. Infine, partendo da c, si possono raggiungere tutte le lettere la cui posizione nell'alfabeto inglese dà resto 0 quando divisa per 3 (3, 6, 9, ecc.), in altre parole, tutti i multipli di 3. Poiché qualsiasi numero dà resto 0, 1 o 2 quando diviso per 3, questo copre tutte le lettere. Ciò dimostra che tutte le lettere dell'alfabeto sono possibili lettere terminali della variante $+3$ del gioco.

La variante $+3$ è matematicamente un po' più interessante della versione originale $+2$. Essa chiarisce che alla base delle soluzioni, come i lettori avranno ovviamente capito, vi è l'aritmetica modulare. Le lettere raggiungibili da a nella versione originale $+2$ del gioco sono solo le lettere le cui posizioni sono della forma $1 + 2N \pmod{26}$ per N non negativi. Dato il fatto curioso che tutte le vocali sono in posizione $1 + 2N \pmod{26}$ per alcuni N, tutte e solo le lettere le cui posizioni sono pari a $1 + 2N \pmod{26}$ sono raggiungibili. Una spiegazione simile può essere data per la variante $+3$: i numeri pari a $1 + 3N \pmod{26}$ per N non negativo sono tutti i numeri da 0 a 25, in modo che il risultato sia ottenibile da a (e a fortiori da una vocale).

5 I giochi di consonanti

Passiamo ora al gioco delle consonanti, o meglio ai giochi, visto che se ne possono produrre infiniti. A differenza dei giochi di vocali, lo scopo di questi giochi è quello di raggiungere tutte le consonanti soggette al vincolo di non raggiungere le vocali. Diverse versioni di questo gioco nascono da descrizioni diverse delle due azioni, analoghe a quelle del gioco delle vocali. Supponiamo che $\mathcal{S}$ sia un insieme di consonanti e N un intero non negativo. Il gioco $(\mathcal{S}, N)$ è il seguente:[4]

(i) Azione 1: immediatamente sotto l'ultima lettera da scrivere, scrivere qualsiasi elemento di $\mathcal{S}$.

(ii) Azione 2: immediatamente sotto l'ultima lettera da scrivere, scrivere qualsiasi lettera che sia l'N-esimo successore nell'alfabeto di qualsiasi lettera precedente.

(iii) Azione 3: terminare il gioco.

Le lettere terminali sono poi definite nello stesso modo del gioco delle vocali. Il gioco $(\mathcal{S}, N)$, per valori specifici di $\mathcal{S}$ e N, si dice che sia *corretto* se il suo insieme di lettere terminali non contiene vocali, e *scorretto* se questo insieme contiene almeno una vocale. Si dice *completo* se il suo insieme di lettere terminali contiene tutte le consonanti e *incompleto* se ne omette almeno una. L'idea alla base di questa terminologia è che, a differenza del gioco delle vocali, nei giochi di consonanti le vocali sono considerate «cattive», quindi non vogliamo che nessuna di esse finisca come lettera terminale; mentre le consonanti sono considerate «buone», quindi ne vogliamo il maggior numero possibile come lettere terminali.

Illustriamo la definizione con alcuni esempi. Iniziamo con una semplice classe di giochi, in cui $\mathcal{S}$ è l'insieme vuoto $\emptyset$ e N è un qualsiasi numero intero non negativo.

[4] Come in precedenza, l'N-esimo successore di una lettera è la lettera che appare N dopo di essa nell'alfabeto (ciclico); ad esempio, il terzo successore di a è d e quello di z è c.

Siccome in questi giochi non possiamo mai eseguire nessuna delle due azioni—non possiamo mai iniziare—è chiaro che l'insieme di lettere terminali è vuoto. Così tutti i giochi di $(\emptyset, N)$ sono corretti ma incompleti.

Consideriamo adesso la classe di giochi per i quali $N = 0$. Poiché in questi giochi l'azione 2 si riduce a «scrivere qualsiasi lettera scritta in precedenza», le lettere terminali del gioco $(\mathcal{S}, 0)$ sono semplicemente gli elementi di $\mathcal{S}$. In questo caso, l'unico gioco corretto e completo è quello per cui $\mathcal{S}$ è uguale a $\mathcal{C}$, dove $\mathcal{C}$ è l'insieme delle consonanti in lingua inglese. Infatti, se in $\mathcal{S}$ si omettono alcune consonanti, allora il gioco $(\mathcal{S}, 0)$ è incompleto; e se $\mathcal{S}$ contiene una vocale, allora il gioco non è corretto.

Rivolgiamoci, infine, al caso $N = 2$. Quando si trattava del gioco delle vocali, abbiamo notato che le vocali occupano posizioni dispari nell'alfabeto e che l'alfabeto è composto da un numero pari di lettere. Il gioco $(\mathcal{S}, 2)$ non è quindi corretto se $\mathcal{S}$ contiene una qualsiasi consonante la cui posizione nell'alfabeto sia dispari; per esempio se c è in $\mathcal{S}$, allora si può raggiungere e scrivendo c (azione 1), seguito da e (azione 2) che è una vocale. Al contrario, se $\mathcal{S}$ non contiene alcuna consonante la cui posizione nell'alfabeto sia dispari, allora il gioco $(\mathcal{S}, 2)$ è corretto ma incompleto poiché l'insieme delle lettere terminali in quel caso non può contenere nessuna delle consonanti dispari, cioè nessuna fra le lettere $c, g, k, m, m, q, s, w, y$. La ragione di fondo, ancora una volta, è che l'azione $+2$ conserva la parità e che l'alfabeto inglese ha un numero pari di lettere.

Sorge quindi una domanda naturale: per quali $\mathcal{S}$ e N il gioco $(\mathcal{S}, N)$ sarebbe corretto e completo?

6 Un piccolo teorema

La risposta è:

> *Teorema.* Il gioco $(\mathcal{S}, N)$ è corretto e completo se e solo se $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ (l'insieme delle consonanti) e N è un multiplo di 26.

Per dimostrare il teorema, abbiamo bisogno di un lemma:

> *Lemma.* Sia D il massimo comun divisore dei due interi M e N. Se A è un intero, allora ogni equazione in un X sconosciuto della forma $NX \equiv DA \pmod{M}$ ha soluzione.

La dimostrazione del lemma è abbastanza facile se considera che: se D è il più massimo comun divisore di M e N, allora ci sono numeri interi X e Y tali che $XM + YN = D$. Moltiplicando per A entrambi i membri dell'ultima equazione, vediamo che $AXM + AYN = AD$ e dunque che AYN equivale a $AD \pmod{M}$. Ciò costituisce un corollario dell'algoritmo euclideo per trovare il più grande divisore comune di due interi; la sua dimostrazione può essere rintracciata in qualsiasi manuale di teoria dei numeri elementare.

Passando ora al teorema, è chiaro che l'insieme $\mathcal{T}$ di lettere terminali del gioco $(\mathcal{S}, N)$ è costituito da tutte le lettere uguali a $S + NX \pmod{26}$, dove S è la posizione nell'alfabeto di un qualche elemento di $\mathcal{S}$ e X è un qualsiasi intero non negativo.

Abbiamo diviso l'argomento in quattro casi. Poiché il gioco $(\mathcal{S}, N)$ equivale al gioco $(\mathcal{S}, N + 26K)$, dobbiamo considerare solo i valori di N inclusi tra 0 e 25. Si osservi inoltre, come precedentemente argomentato, che se $\mathcal{S}$ è vuoto, allora anche $\mathcal{T}$ è vuoto. Quindi, se il gioco $(\mathcal{S}, N)$ ha una possibilità di essere corretto e completo, $\mathcal{S}$ deve contenere almeno una lettera, fatto che d'ora in poi diamo per scontato.

(i) Se $N = 0$ allora $\mathcal{T} = \mathcal{S}$. Quindi, se il gioco $(\mathcal{S}, 0)$ è corretto e completo, $\mathcal{S}$ è uguale a $\mathcal{C}$, ovvero all'insieme delle consonanti.

(ii) Se N è dispari e non divisibile per 13, allora $\mathcal{T}$ è l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto, poiché i valori di $NX \pmod{26}$ sono tutti gli interi inclusi tra 0 e 25 (applicare il Lemma con $N = N$, $M = 26$ e $D = 1$). Ne consegue che se N è dispari e non divisibile per 13, allora il gioco $(\mathcal{S}, N)$ non è corretto.

(iii) Se N è dispari e divisibile per 13, allora $N = 13$. Se $\mathcal{T}$ è uguale a $\mathcal{C}$, allora deve contenere la lettera b e, quindi, il suo antipodo o (l'antipodo di una lettera è di 13 posti dopo e prima nell'alfabeto inglese ciclico), quindi il gioco non può essere sia corretto che completo.

(iv) Se N è pari e non zero, allora N non è divisibile per 13 ma è divisibile per 2. Con un'applicazione del Lemma (con $N = N$, $M = 26$, $D = 2$), ogni equazione in X sconosciuto della forma $NX \equiv 2A \pmod{26}$ ha una soluzione, dove A è un intero. E se il gioco $(\mathcal{S}, N)$ è completo, allora l'insieme $\mathcal{T}$ di lettere terminali contiene c. Ma se $\mathcal{T}$ contiene c, che è la terza lettera dell'alfabeto, allora contiene anche tutte le lettere dispari, per quanto appena sostenuto. Di conseguenza, nessun gioco di questo tipo può essere corretto e completo.

Questo completa la dimostrazione che gli unici giochi corretti e completi sono quelli per i quali $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ e N è divisibile per 26. In altre parole: i giochi in cui si può scrivere qualsiasi consonante e qualsiasi lettera scritte in precedenza. Questi giochi sono banalmente corretti e completi; e nessun altro gioco è sia corretto che completo. Si noti che la nostra dimostrazione ha utilizzato alcuni elementi di aritmetica modulare che potrebbero non essere familiari a qualche studente; in tale caso, si potrebbe comunque dimostrare il teorema riconsiderando attentamente i 26 possibili valori di N, per diversi $\mathcal{S}$.

7 Analogia

Cosa hanno a che fare con la metamatematica il gioco delle vocali e i giochi di consonanti? In effetti, i giochi di consonanti (su cui ci concentriamo ora) ci permettono di tracciare un'analogia metamatematica piuttosto precisa.

Possiamo pensare alle lettere dell'alfabeto come ad enunciati matematici, ad esempio, enunciati aritmetici, geometrici o della combinatoria. Le consonanti possono essere pensate come enunciati veri, ad esempio $2 + 3 = 5$, e le vocali come enunciati falsi, ad esempio $2 + 3 = 7$.[5] Le consonanti in $\mathcal{S}$, che si possono scrivere

[5]Nel gioco delle vocali, l'analogia risulterebbe invertita: le vocali avrebbero il ruolo degli enunciati veri.

in qualsiasi punto, sono simili agli assiomi: enunciati veri che si possono assumere in qualsiasi fase della dimostrazione. L'applicazione dell'Azione 1 è quindi simile all'assunzione di un assioma in una dimostrazione matematica, cioè di un'affermazione o una proposizione che non è necessario dimostrare ma che si può semplicemente postulare. L'applicazione dell'azione 2, invece, è simile all'applicazione di una regola d'inferenza: essa permette di ricavare una nuova affermazione da altre derivate in precedenza. Una lettera terminale è simile a un teorema: un'affermazione o una conclusione dimostrata solo sulla base di assiomi assunti come punto di partenza e usando regole di inferenza valide. Un sistema assiomatico è corretto proprio quando il suo insieme di teoremi consiste solo di affermazioni vere. Quest'ultimo è simile a un gioco di consonanti corretto, che 'dimostra' solo le consonanti (affermazioni vere) e non le vocali (affermazioni false). Un sistema assiomatico è completo proprio quando il suo insieme di teoremi è costituito da affermazioni vere. Questo è simile a un gioco di consonanti completo, che 'dimostra' tutte le consonanti (affermazioni vere). Si auspica idealmente, quindi, un sistema corretto e completo allo stesso tempo, cioè un sistema in grado di dimostrare o contenere tutti e solo gli enunciati veri. Infine, il ramo della matematica usato per indagare se un particolare gioco di consonanti è corretto o completo è l'aritmetica modulare. Secondo la nostra analogia, essa svolge il ruolo della metamatematica, utilizzata per indagare le proprietà dei sistemi matematici e in particolare la loro correttezza e completezza.

Uno dei sistemi deduttivi più famosi è l'aritmetica di Peano. Il sistema, che porta il nome del celebre matematico piemontese, contiene assiomi per i principi intuitivamente veri dell'aritmetica (come il principio d'induzione) e regole logiche d'inferenza (come quella chiamata *modus ponens*: da 'A' e da 'se A allora B', si inferisce B).[6] L'aritmetica di Peano costituisce un sistema corretto, in quanto gli assiomi sono veri e le regole d'inferenza del sistema preservano la verità; quindi, l'insieme di teoremi è un sottoinsieme di tutti gli enunciati veri che si possono produrre nel linguaggio del sistema. La domanda allora è: l'aritmetica di Peano risulta completa? Vale a dire: oltre a dimostrare soltanto gli enunciati veri dell'aritmetica, l'aritmetica di Peano dimostrerebbe la verità dell'insieme di tali enunciati? (Ammesso che il sistema sia coerente.) Questa è proprio la domanda a cui Gödel rispose in maniera negativa nel 1931.[7] Come mostrò, l'aritmetica di Peano è, in effetti, incompleta, cioè include alcuni enunciati aritmetici veri che essa stessa non può dimostrare. Gli enunciati veri, ma non dimostrabili, generati dai metodi di Gödel sono ora chiamati enunciati indecidibili di Gödel. Le argomentazioni di Gödel hanno dimostrato che tali tipi di enunciati sorgono per qualsiasi sistema matematico ragionevole, compreso qualsiasi sistema coerente che includa l'aritmetica di base e il cui insieme di teoremi possa essere effettivamente generato.

Come mostrò Gödel, i sistemi matematici attuali tendono ad essere più simili ai giochi $(\mathcal{S}, N)$ per N non divisibile per 26 rispetto ai giochi $(\mathcal{C}, 0)$: sono corretti ma incompleti. Il nostro teorema di 'impossibilità per sistemi con $N \neq 0 \pmod{26}$

[6] L'attribuzione a Peano è in realtà impropria e dovuta a Bertrand Russell; Richard Dedekind, infatti, ideò per primo questi assiomi che Peano poi indagò, attribuendoli onestamente allo stesso Dedekind. [Segue nel testo originale un'osservazione sulla corretta pronuncia del nome 'Peano', poco fedele alla pronuncia italiana.]

[7] Gödel stesso si occupava del sistema di Russell e Whitehead nei «Principia Mathematica» ma la sua argomentazione tende a generalizzarsi.

o $\mathcal{S} \neq \mathcal{C}$ ha dimostrato che, essendo il sistema corretto, è impossibile raggiungere tutte le consonanti.

Riassumiamo, nella seguente tabella, i parallelismi tra i giochi di consonanti e i sistemi di dimostrazione:

Gioco di consonanti	**Teoria matematica**
alfabeto	enunciati
consonanti	enunciati veri
vocali	enunciati veri
lettere terminali (elementi di $\mathcal{T}$)	teoremi
l'insieme $\mathcal{S}$	l'insieme degli assiomi
l'azione $+N$	regole d'inferenza
applicare l'azione 1	assumere un assioma
applicare l'azione 2	applicare una regola d'inferenza
aritmetica modulare	metamatematica
correttezza (nessuna vocale è raggiungibile)	correttezza (nessun enunciato falso è dimostrabile)
scorrettezza (una vocale è raggiungibile)	scorrettezza (un enunciato falso è dimostrabile)
completezza (tutte le consonanti sono raggiungibili)	completezza (tutti gli enunciati veri sono dimostrabili)
incompletezza (non tutte le consonanti sono raggiungibili)	incompletezza (non tutti gli enunciati veri sono dimostrabili))

Attenzione però: il parallelismo non è perfetto. Gli argomenti che abbiamo fornito per la completezza/incompletezza o correttezza/scorrettezza dei giochi $(\mathcal{S}, N)$ sono basati sull'aritmetica modulare. La genialità di Gödel sta nell'aver usato l'aritmetica stessa per codificare una proposizione G che afferma che G stessa non è dimostrabile nel sistema. Infatti, l'argomentazione di Gödel sfrutta alcuni aspetti dell'aritmetica modulare, incluso il Teorema cinese del resto; inoltre, utilizza, in modo cruciale, la possibilità di sfruttare i numeri per codificare le affermazioni dell'aritmetica o di qualsiasi altra teoria matematica. È abbastanza chiaro, al contrario, che l'aritmetica modulare è una teoria completamente diversa dal gioco delle consonanti in sé; non c'è un modo diretto in cui potremmo usare il gioco delle consonanti per indagare su se stesso. Ma anche se il gioco consonantico non accenna all'idea di autoreferenzialità che è centrale nell'argomentazione di Gödel, ha comunque molti altri punti di analogia, come abbiamo visto, con l'aritmetica modulare.

8 Conclusione

Bastano concetti semplici per risolvere il gioco delle vocali; infatti, è richiesta solo una comprensione implicita dell'aritmetica modulare. In effetti, sono stato attento a spiegare tale gioco evitando ogni esplicito riferimento all'aritmetica modulare. Risolvere i giochi di consonanti richiede qualcosa in più e, comunque, una conoscenza abbastanza elementare dell'aritmetica modulare. Questi giochi sono quindi accessibili, matematicamente interessanti, e rappresentano una vera e propria introduzione alla metamatematica. In effetti, in passato ho usato il gioco delle vocali nella domanda per il colloquio di ammissione ad Oxford, anche se ciò non accade più da qualche anno ormai. Riflettere sui giochi di lettere costituisce un'agevole introduzione al tipo di pensiero implicito nella metamatematica e, soprattutto, non richiede nessuna conoscenza della logica formale.